Les nombres réels

Naoual MRHARDY

Faculté Polydisciplinaire Khouribga
SMI/SMA

13 décembre 2020

Les nombres réels

Naoual MRHARDY

Faculté Polydisciplinaire Khouribga
SMI/SMA

13 décembre 2020

Programme

- **L'ensemble des entiers naturels,** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Il vérifie le principe de récurrence, qu'on peut formuler de la manière suivante :

Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ un énoncé dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et ayant un sens pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$ ou 1). La démonstration par récurrence de $\mathcal{P}(n)$ comporte 2 étapes :

1. On montre d'abord que le résultat est vrai pour $n = n_0$.
2. On démontre ensuite, que si le résultat est vrai pour $n \geq n_0$ **(hypothèse de récurrence)** , alors il reste vrai pour $n + 1$. On montre donc l'implication

$$\textbf{(H.R)} \quad \mathcal{P}(n) \text{ } vrai \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ } vrai \quad \forall n \geq n_0.$$

Rappels sur les ensembles

- **L'ensemble des entiers relatifs** $\mathbb{Z}$, union de $\mathbb{N}$ et des opposés des entiers non nuls : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ introduit pour permettre la résolution de l'équation :

$$x + n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bien sur on a

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

- **L'ensemble des entiers relatifs** $\mathbb{Z}$, union de $\mathbb{N}$ et des oppossés des entiers non nuls : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ introduit pour permettre la résolution de l'équation :

$$x + n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bien sur on a

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

- **L'ensemble des nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ définie par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \textbf{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

introduit pour la résolution de l'équation

$$qx = p, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

Bien sur on a

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

Rappels sur les ensembles

Remarque

- Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous forme de **fraction irréductible**, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{avec } p \textbf{ et } q \textbf{ premiers entre eux } (p \wedge q = 1).$$

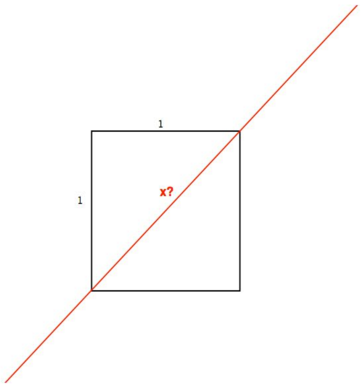
  Par exemple : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- On a aussi les règles de calcul suivantes, si $\frac{p}{q}$ et $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ alors

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{qa + pb}{qb} \quad et \quad \frac{p}{q}\frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$$

  L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans $\mathbb{Q}$.

Insuffisance de $\mathbb{Q}$



D'après le théorème de Pythagore, on cherche à résoudre l'équation,

$$x^2 = 2.$$

- **Insuffisance de Q.** Il n'existait pas de nombre rationnel x solution de cet équation.

- Introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, noté $\mathbb{R}$, et appelé ensemble des nombres réels ,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$$

Exercice. Démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Réponse : Supposons, par l'absurde $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ c-à-d il existe $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \wedge q$ alors, on obtient

$$p^2 = 2q^2$$

L'entier p^2 est donc pair ce qui signifie que p l'est aussi. Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p'$ et alors on a

$$2q^2 = p^2 = 4p'^2 \Longrightarrow q^2 = 2p'^2$$

q est également pair. D'où 2 divise à la fois p et q, ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Parmi les irrationnels on distingue 2 types de nombres

- Les algébriques. les racines des polynômes à coefficient entiers : $x^n = a$.
- Les transcendants : π et e...

Parmi les irrationnels on distingue 2 types de nombres

- Les algébriques. les racines des polynômes à coefficient entiers : $x^n = a$.
- Les transcendants : π et e...

Exercice(TD) Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Parmi les irrationnels on distingue 2 types de nombres

- Les algébriques. les racines des polynômes à coefficient entiers : $x^n = a$.
- Les transcendants : π et e...

Exercice(TD) Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel. Réponse. Par absurde, supposons $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow q\ln(3) = p\ln(2) \Rightarrow \ln(3^q) = \ln(2^p) \Rightarrow 3^q = 2^p$

or 3^q est impair et 2^p est pair ce qui est absurde. D'où $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel transcendant.

Définition

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ (qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$), et d'une relation binaire $\leq$ telles que :

1. $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe commutatif de neutre 0.*
2. $(\mathbb{R}, \times)$ *est un groupe commutatif de neutre 1.*
3. *La loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.*
4. *Tout réel non nul possède un unique "inverse"*
5. $\leq$ *est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.*

On résume les propiétés précédentes en disant que :

$(\mathbb{R}, +, \times)$ **est un corps commutatif totalement ordonné.**

Exercice(TD)

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Réponse.

(1) Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \in \mathbb{Q}$ or

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})\right] \in \mathbb{Q} \; \textit{absurde}$$

Exercice(TD)

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Réponse.

(2) On pose $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Supposons $r+x = \frac{p'}{q'}$, $p' \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x = \frac{p'}{q'} - r = \frac{p'q - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q} \ \textit{absurde}$$

Exercice(TD)

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Réponse.

(3) Soit $r, r' \in \mathbb{Q}$, $r < r'$. On pose $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$ (d'après (2)). De plus

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) < r' - r$$

$$\Rightarrow r < x < r'$$

- **L'ensemble vide** $\emptyset$. (par convention)
- **Intervalles bornés :** (On désigne par a et b des réels $a < b$)
  - Intervalles ouverts bornés : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
  - Intervalles semi-ouverts bornés : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
  - Intervalles fermés bornés ou segment d'extrémités a et b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalles non bornés :** (On désigne par a et b des réels)
  - Intervalles fermés non bornés
    - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
    - $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
  - Intervalles ouverts non bornés :
    - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
    - $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
    - $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in \mathrm{I}.$$

Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, I est un intervalle si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in \mathrm{I}.$$

Cette propriété s'appelle **la convexité**.

Exemples - $\mathbb{Z}$ **n'est pas un intervalle de** $\mathbb{R}$ **car** $1, 2 \in \mathbb{Z}$ **mais pas** $\frac{3}{2}$ **.** $\mathbb{Q}$ **n'est pas un intervalle de** $\mathbb{R}$**.**

Propriétés

- L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriétés

- L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve : Montrons la première assertion. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

Propriétés

- L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve : Montrons la première assertion. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

- Si $\mathrm{K} = \emptyset$, alors c'est un intervalle.

Propriétés

- L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve : Montrons la première assertion. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

- Si $\mathrm{K} = \emptyset$, alors c'est un intervalle.
- Si $\mathrm{K} \neq \emptyset$, alors soit $x, y \in \mathrm{K}$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$.
  - $x, y \in \mathrm{I}$ et I est un intervalle $\Longrightarrow z \in \mathrm{I}$
  - $x, y \in \mathrm{J}$ et J est un intervalle $\Longrightarrow z \in \mathrm{J}$

  finalement $z \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \mathrm{K}$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les voisinages

Voisinage d'un point

Soit x un réel. Une partie V de $\mathbb{R}$ est dite **voisinage** de x si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha < x < \beta \textbf{ tel que }]\alpha, \beta[\subset V$$

De façon équivalente une partie V est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$.

On note $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Voisinage de l'infini

- Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $+\infty$.
- Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, B[$ $(B \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $-\infty$.

On appelle droite numérique achevée et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}$, obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et régis par les loi suivantes :

- **Prolongement de l'ordre de $\overline{\mathbb{R}}$:** $\forall x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty$
- **Prolongement de l'addition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty,\ x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty,$$

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\ (-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

- **Prolongement de la multiplication :** Pour tout $\mathrm{x} \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$:

$$x \times (\pm\infty)=(\pm\infty)\times x=\begin{cases} \pm\infty & si\ x>0 \\ \mp\infty & si\ x<0 \end{cases}$$

Programme

Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que

- M est **un majorant de A** (ou A est majorée par M) si
$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$
- m est **un minorant de A** (ou A est minorée par m) si
$$\forall x \in A, \quad x \geq m$$
- A est **bornée** si elle est à la fois majoré et minoré.

L'ensemble des **majorants** (resp. minorants) de A sera noté $\mathcal{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{M}(A)$).

Remarque

Le majorant ou le minorant n'existent pas toujours, en plus on n'a pas l'unicité.

Exemples

1. L'ensemble $A =]-\infty, 1]$ est majorée par 1 et par tous les éléments de $[1, +\infty[$ donc $\mathcal{M}(A) = [1, +\infty[$ par contre il n'est pas minoré c-à-d $\mathfrak{M}(A) = \emptyset$.
2. Si $B = [0, 1[$ donc $\mathcal{M}(B) = [1, +\infty[$ et $\mathfrak{M}(B) =]-\infty, 0]$

On peut remarquer que

- $\mathcal{M}(A) \bigcap A = \{1\}$ et $\mathfrak{M}(A) \bigcap A = \emptyset$
- $\mathcal{M}(B) \bigcap B = \emptyset$ et $\mathfrak{M}(B) \bigcap B = \{0\}$

Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que

- M est **le plus grand élément** ou maximum de A et on le note $\max A$, si

$$M = \max A \Longleftrightarrow M \text{ majore } A \quad \text{et} \quad M \in A \Longleftrightarrow M \in \mathcal{M}(A) \cap A$$

- N est **le plus petit élément** ou minimum de A et on le note $\min A$, si

$$N = \min A \Longleftrightarrow N \text{ minore } A \text{ et } N \in A \Longleftrightarrow N \in \mathfrak{M}(A) \cap A$$

Remarque

Comme pour le majorant et le minorant, il n'existe pas toujours de maximum ni de minimum, par contre on a l'unicité.

Unicité

Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, celui ci est unique.

Preuve : Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. On suppose que M et M' deux plus grands éléments de A. Alors par définition on aura

$$\left\{\begin{array}{lll} M \in A; M' \in \mathcal{M}(A) & \Rightarrow & M \leq M' \\ \\ M' \in A; M \in \mathcal{M}(A) & \Rightarrow & M' \leq M \end{array}\right. \Longrightarrow M = M'$$

Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

1. Si $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$ et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$ i.e
$$\sup(A) = \min\left(\mathcal{M}(A)\right)$$
2. Si $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$. i.e
$$\inf(A) = \max\left(\mathfrak{M}(A)\right)$$

Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, alors A posséde une borne supérieure (resp. inférieure), de plus

$$\sup A = \max A \quad (\textit{resp.}\ \inf A = \min A)$$

Exercice (TD) Trouver $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ et $\min A$ quand ils existent ; de l'ensemble :

$$A = \{0\} \cup]1; 2[$$

Réponse. A est borné : évident

- On a $\forall x \in A, x \geq 0 \Longrightarrow 0 \in \mathfrak{M}(A) =]-\infty, 0]$ or $0 \in A$ donc

$$A \bigcap \mathfrak{M}(A) = \{0\} \Longrightarrow \inf A = \min A = 0$$

- $\forall x \in A, x < 2 \Longrightarrow 2 \in \mathcal{M}(A) = [2, +\infty[$ or

$$A \bigcap \mathcal{M}(A) = \emptyset \Longrightarrow \max A \textbf{ n'existe pas}$$

Mais

$$\min(\mathcal{M}(A)) = 2 \Longrightarrow \sup A = 2$$

Exercice Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}.$$

Montrer que A est majorée mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Réponse. C'est un sous-ensemble majorée de $\mathbb{Q}$ par exemple par $\frac{3}{2}$. De plus

$$\mathcal{M}(A) = \{M \in \mathbb{Q}/M > \sqrt{2}\}$$

Soit $M \in \mathcal{M}(A)$. Posons $M' = \dfrac{M^2+2}{2M}$

- $M'^2 - 2 = \frac{(M^2-2)^2}{4M^2} > 0 \Rightarrow M'^2 > 2 \Rightarrow M' > \sqrt{2} \Rightarrow M' \in \mathcal{M}(A)$
- $M - M' = M - \frac{M^2+2}{2M} = \frac{M^2-2}{2M} > 0 \Rightarrow M' < M$

M' est un autre majorant (dans $\mathbb{Q}$) tel que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant

Propriété de la borne supérieure

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Définition

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure.

Conséquence : Il en découle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Corollaire

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$, admet une borne sup et une borne inf dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple : l'ensemble $A = [1, +\infty[$ admet une borne supérieur dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est : $\sup A = +\infty$

Exercice (TD) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que

(a) $A \subset B \Longrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$

(b) $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$.

Réponse.

(a) Soit $x \in A \Rightarrow x \in B$ (car $A \subset B$)
donc par définition $x \geq \inf B \Longrightarrow \inf B \in \mathfrak{M}(A)$
d'où

$$\inf(B) \leq \inf(A) = \max(\mathfrak{M}(A))$$

(b) De la même manière.

Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel. Il y a équivalence entre :

1. α est la borne supérieure de A.
2. (i) $\forall x \in A, \quad x \leq \alpha$ et (ii) $\forall y < \alpha, \ \exists x \in A, \quad y < x \leq \alpha$.

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii)' \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$$

Où de façon équivalente

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x \in A, \ \alpha - \frac{1}{n} < x \leq \alpha$$

Exercice(TD) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{x + y / x \in A;\ \ y \in B\}$$

Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Réponse.

(i) Soient $x \in A$ et $y \in B$; on a
$x \leq \sup A$ *et* $y \leq \sup B \Rightarrow x + y \leq \sup A + \sup B$ donc
$\sup A + \sup B \in \mathcal{M}(A + B)$

$(ii)'$ Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\begin{cases} \exists x \in A;\ \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x \\ \exists y \in B;\ \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists z = (x + y) \in A + B;\ \sup A + \sup B - \varepsilon < z.$

Caractérisation de la borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et β un nombre réel. Il y a équivalence entre :

1. β est la borne inférieure de A.
2. (i) $\forall x \in A, \quad \beta \leq x$ et (ii) $\forall y > \beta, \ \exists x \in A, \quad \beta \leq x < y$.

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii)' \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \beta \leq x < \beta + \varepsilon$$

Où de façon équivalente :

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x_n \in A, \ \beta \leq x_n < \beta + \frac{1}{n}$$

Exercice(TD). Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et que

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$$

Réponse.

(i) Soit $x \in A \cup B$: Il y a 2 cas

- Si $x \in A \Rightarrow x \geq \inf A \geq \min(\inf A, \inf B)$
- Si $x \in B \Rightarrow x \geq \inf B \geq \min(\inf A, \inf B)$

dans les 2 cas $\min(\inf A, \inf B) \in \mathfrak{M}(A \cup B)$

(ii) Soit $y > \min(\inf A, \inf B)$; on a toujours 2 cas

- $y > \inf A \Rightarrow \exists x_1 \in A \subset A \cup B;\ x_1 < y$
- $y > \inf B \Rightarrow \exists x_2 \in B \subset A \cup B;\ x_2 < y$

dans les 2 cas $\exists x(= x_1 \ ou\ x_2) \in A \cup B;\ x < y$

Opération sur les bornes supérieures et inférieure

On suppose que A et B sont bornés. Alors

(i) L'ensemble $A\bigcup B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup A\bigcup B = \max\{\sup A, \sup B\}$$

(ii) L'ensemble $A+B$ posséde une borne inférieure et de plus ;

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

(iii) Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble λA posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ vérifie la propriété d'Archimède c-à-d :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \leq ny(\ ou\ x < ny)$$

On dit aussi que $\mathbb{R}$ **est un corps archimèdien**

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R}$, et $y \in \mathbb{R}^{+*}$. Par l'absurde, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x > ny$. On pose

$$A = \{ny / n \in \mathbb{N}^*\}$$

A est non vide (contient y) et majoré par x, donc A admet une borne supérieure.

Soit $b = \sup(A)$, on a $b - y < b$ (car $y > 0$) donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0 + 1)y \in A$ ce qui est absurde.

Exercice(TD) Trouver $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ et $\min A$ quand ils existent dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}; \quad (2)\ A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Réponse.

(1) On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2^{-n} \leq 1$

- $1 = 2^0 \in A$ *et* $1 \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow 1 \in A \cap \mathcal{M}(A) \Rightarrow \max A = \sup A = 1$
- On $0 \in \mathfrak{M}(A)$. Montrons que $0 = \inf A$. Pour cela, on montre

$$(ii')\ \forall \varepsilon > 0; \quad \exists x \in A; \quad x < \varepsilon$$

cela revien à chercher n tel que $2^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \lg_2(\frac{1}{\varepsilon})$?
Soit $\varepsilon > 0$; par la propriété d'Archimède ;
pour $x = \lg_2(\frac{1}{\varepsilon}) \in \mathbb{R}$, **et** $y = 1 \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x < ny$ donc

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \lg(\frac{1}{\varepsilon}) < n \lg 2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{-n} < \varepsilon$$

d'où $0 = \inf A$ or $0 \notin A$ donc A n'a pas de minimum.

Réponse.

(2) On remarque d'abord que

$$A = \left\{1 + \frac{1}{2p}, p \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2p+1}, p \in \mathbb{N}\right\} = A_1 \cup A_2$$

Pour A_1 ; on a $\forall p \in \mathbb{N}^*; 1 \leq 1 + \dfrac{1}{2p} \leq \dfrac{3}{2}$

- $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \in A_1$ *et* $\frac{3}{2} \in \mathcal{M}(A_1) \Rightarrow \max A_1 = \sup A_1 = \frac{3}{2}$
- On a $1 \in \mathfrak{M}(A)$. Montrons que $1 = \inf A_1$. Pour cela, on montre $(ii')\forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A; x < \varepsilon + 1$

  cela revien à chercher p tel que $1 + \dfrac{1}{2p} < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow p > \dfrac{1}{2\varepsilon}$?

  Soit $\varepsilon > 0$; par la propriété d'Archimède ;
  pour $x = \frac{1}{2\varepsilon} \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{N}^* \quad x < p$ donc

  $$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{2p} < \varepsilon + 1$$

  d'où $1 = \inf A_1$ or $1 \notin A_1$ donc A_1 n'a pas de minimum.

Réponse.

(2) On remarque d'abord que

$$A = \left\{1 + \frac{1}{2p}, p \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2p+1}, p \in \mathbb{N}\right\} = A_1 \cup A_2$$

De même on montre que $\max A_2 = \sup A_2 = 0$ et $\inf A_2 = -1 \notin A_2$ donc A_2 n'a pas de minimu.

On conclut

$$\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2} \in A_1 \subset A \Rightarrow \max A = \frac{3}{2}$$

donc

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}$$

et

$$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(-1, 1) = -1 \notin A$$

donc A n'admet pas de minimum.

Programme

1. Rappels sur les ensembles
2. Caractérisation de $\mathbb{R}$ par la propriété de la borne supérieure
3. **Approximation d'un réel**

Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(x, -x)$. On a donc

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La quantité $d(x, y) = |x - y|$ mesure **la distance** entre deux réels x et y.

On tire de cette définition les conséquences immédiates suivantes valables pour tout réel :

$$|x| = |-x|, \ -|x| \leq x \leq |x|, \ et \ |x|^2 = x^2.$$

Propriétés

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

$$N_1 : |x| = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$N_2 : |xy| = |x||y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$N_3 : |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (Inégalité triuangulaire)}$$

Nous allons montrer la propriété N_3 : ona

$$\begin{aligned} |x + y| &= \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \\ &\leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \end{aligned}$$

Corollaire 1

1. Si $a \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. On a l'inégalité $||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Preuve : Par l'inégalité triangulaire on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|$$

on conclut à partir du point (1).

Corollaire 2

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence : $a = 0 \Longleftrightarrow |a| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.
2. Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $a \leq b \Longleftrightarrow a \leq b + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p, tel que :

$$p \leq x < p+1$$

p est appelé **la partie entière** de x et notée $E(x)$ ou parfois $[x]$.

Exemples - $E(13) = 13, \quad E(3,9) = 3, \; E(-2) = -2, \quad E(-7,4) = -8$

- $E(x)$ est le plus grand entier n tel que $n \leq x$.
- $E(x) + 1$ est le plus petit entier m tel que $x < m$.
- La fonction $x \longmapsto E(x)$ est une fonction croissante, continue en tout point non entier, continue à droite en un point entier.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l' inégalité suivante, très utile en pratique

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

Exercice(TD)

- Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x)+E(y) \leq E(x+y)$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

Réponse

- On a par définition

$$E(x) \leq x;\ \ E(y) \leq y \Longrightarrow E(x)+E(y) \leq x+y$$

Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égale à $x+y$, on déduit que

$$E(x)+E(y) \leq E(x+y)$$

Exercice(TD)

- Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x)+E(y) \leq E(x+y)$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

Réponse

- On a pout tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} E(x) \leq x < E(x)+1 &\Longrightarrow nE(x) \leq nx < nE(x)+n \\ x \longmapsto E(x) \text{ est croissante} &\Longrightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n \\ &\Longrightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1 \end{aligned}$$

d'où par définition

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

Application : Approximations décimales

Un réel d est **un nombre décimal** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tel que $d = \dfrac{p}{10^n}$

Soient x, ε deux réels avec $\varepsilon > 0$.

- On appelle valeur décimal approchée de x à ε près par défaut l'unique décimal d tel que $d \leq x < d + \varepsilon$.
- On appelle valeur décimal approchée de x à ε près par excès l'unique décimal d tel que $d - \varepsilon \leq x \leq d$.

Soit x un réel. Pour tout n un entier naturel il existe un unique entier p_n tel que

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

$\dfrac{p_n}{10^n}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par défaut. En particulier on montre que $p_n = E(x10^n)$

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists d \in D;\ x < d < y$$

Voici une autre définition équivalente (et très utile) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D, \quad |x - d| < \varepsilon$$

Théorème

Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$, x et y deux réels teld que $x < y$. Il existe une infinité d'éléments de D entre x et y.

Théorème

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

- Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il suffit de trouver un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que
$$a < \frac{p}{q} < b.$$
Soit $y = b - a > 0$ et $x = 1$. D'apès la propriété d'Archimède, il existe un entier q tel que
$$q(b-a) > 1 \implies qa + 1 < qb.$$
Soit $p = [qa] + 1$. On a alors
$$qa < p \leq qa + 1 < qb \Longrightarrow qa < p < qb$$
En divisant par q on a le résultat désiré.

- Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ \exists d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \textit{tel que } |x - d| < \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors il suffit qu'on pose $x = d$.
- Si $x \in \mathbb{Q}$: Pour $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / \sqrt{2} < n\varepsilon$
  On pose $d = x + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc

$$|x - d| = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$$

d'où $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Fin